

הנחה של 60 שח על כל קורסי הסמסטר שבאתר.

קורס מקוון סטטיסטיקה ב: ביה"ס לכלכלה, המכללה למנהל:

<https://roy-idan.co.il/hmh8>

קורס מקוון מתמטיקה ב: ביה"ס לכלכלה, המכללה למנהל

<https://roy-idan.co.il/mb6e>

קורס מקוון בחשבונאות פיננסית ב:

<https://roy-idan.co.il/courses/%d7%97%d7%a9%d7%91%d7%95%d7%a0%d7%90%d7%95%d7%aa-%d7%a4%d7%99%d7%a0%d7%a0%d7%a1%d7%99%d7%aa-%d7%91-%d7%91%d7%99%d7%94%d7%a1-%d7%9c%d7%9b%d7%9c%d7%9b%d7%9c%d7%94>

רועי עידן

**מקצוען בהכנת סטודנטים
למבחני התואר**

מומחה למבחני המכללה למנהל

המבחן פתוח כולו. אין אמריקאיות.

נושאים למבחן:

נקודות סטציונריות עם או בלי בעיה כלכלית. מדובר בנושא שהוא ללא אילוץ הומוגניות (ללא משפט אויילר)

בעיה כלכלית עם אילוץ 35 נקודות: הנושא הכי גדול!

גרדיאנט ושימושיו

משמעות שיפוע המשיק לקו הגובה, משמעו ת "שולי", ערך מקורב (קירוב לינארי)

שלבי עבודה לבעיית קיצון עם אילוץ "לה-גרנד"

1. מנסחים את הבעיה באופן מתמטי לפי תבנית:

המספר החופשי שנתון תמיד שייך לאילוץ שעלינו לבנות.

המטרה		בכפוף ל	
MIN	הוצאות	S.t	האילוץ שנבנה
MAX	הכנסות	S.t	האילוץ שנבנה
MAX	רווח	S.t	האילוץ שנבנה
MAX	כמות מיוצרת	S.t	האילוץ שנבנה

2. לבניית ה $L =$ "נמשוך למטה" את הניסוח המתמטי משלב 1

3. נתחיל לפתור עד שמוצאים נקודה אחת X, Y בכך שנבצע:

$$L'_x = 0$$

מציאת

מציאת λ

$$L'_y = 0$$

מציאת

מציאת λ

נשווה בין שתי המדות

$$\lambda = \lambda$$

נגיע למצב של $Y=$ כלומר נבודד את Y
בכך נמצא את הקשר בין X ל Y (נקרא גם קו ההתרחבות)

את ה $Y=$ שמצאנו נציב באילוץ שבנינו
כעת נוכל למצוא מספרית את

$$X, Y, \lambda$$

4. הוכחה שהנקודה שמצאנו אכן הביאה למינימום שביקשו
(או למקסימום שביקשו בשאלה):

את הנקודה שמצאנו בסוף שלב 3 נציב בפונקציה שקיבלנו
בתחילת השאלה (לא להציב באילוץ).

ניגש לאילוץ ונציב למשל $X=0$ ונגלה Y .
את הנקודה החדשה שהומצאה נציב בפונקציה שקיבלנו
בתחילת השאלה
(לא להציב באילוץ כי כבר עבדנו עימו לפני רגע).

נערוך השוואה בין שתי התוצאות אשר תמיד תוכיח
שהנקודה שמצאנו בשלב 3 היא תקינה ונכונה!

שאלה 3 (35 נקודות):

חיים מוציא את כל תקציב דמי הכיס שלו על צריכה של שני מוצרים: פיצה (X) ומים (Y)
 ידוע כי מחיר יחידת X הינו 20 ₪ ומחיר יחידת Y הינו 10 ₪.
 כמו כן, ידוע כי דמי הכיס של חיים הם 2000 ₪.
 להלן פונקציית התועלת U של חיים:

$$U(x, y) = \sqrt{xy}$$

הניחו כי חיים מעוניין למקסם את התועלת שלו בכפוף לדמי הכיס שברשותו.

א. נסחו את בעיית הקיצון בצורה מתמטית בהתאם לנתונים מעלה.

ב. פתרו את בעיית הקיצון.

כמות יחידות X שעליו לרכוש: _____; כמות יחידות Y שעליו לרכוש: _____;
 ערך התועלת ששיג: _____

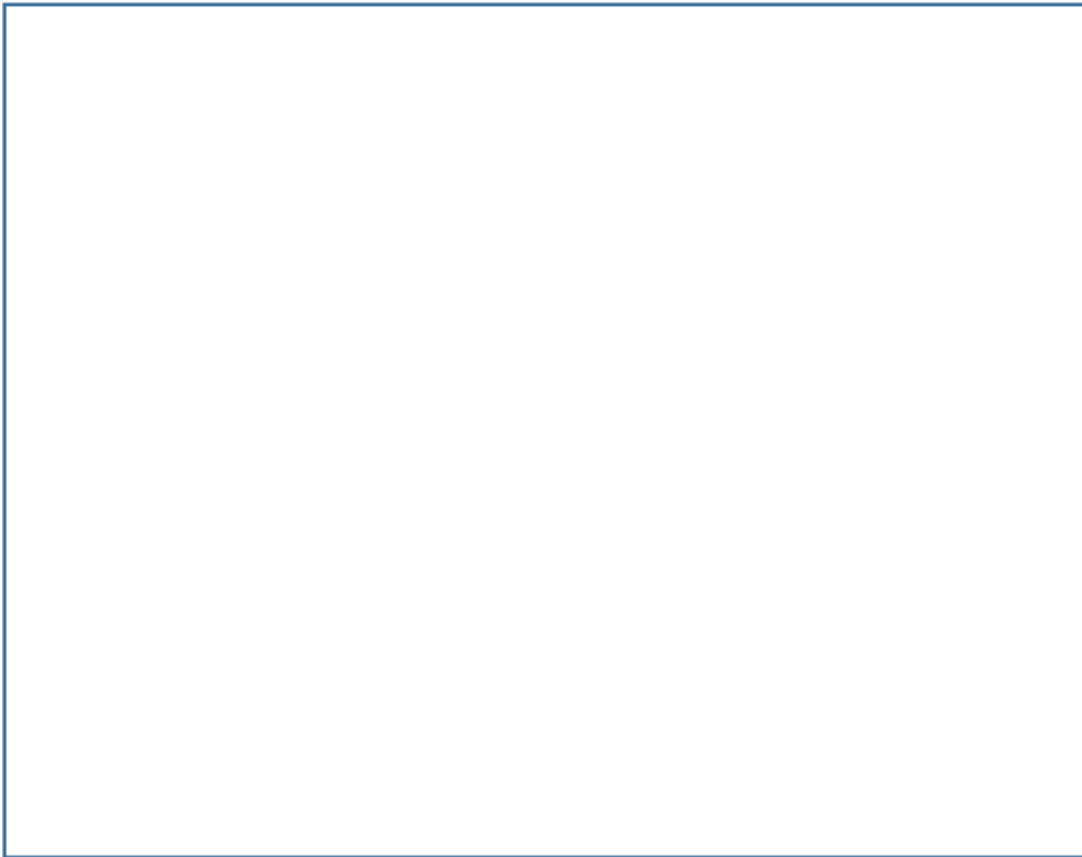
הערה: יש להראות באמצעות חישוב ערך פונקציית המטרה בנקודה אחרת כי אכן קיבלתם נקודת מקסימום.

הסבר: הציגו חישוב מתאים:

ג. יש למצוא בכמה בקירוב תשתנה התועלת של חיים אם דמי הכיס שלו יגדלו ב-5 ₪

ד. שרטטו באותה מערכת צירים את קו הגובה עבור התועלת המקסימלית שמצאתם, את קו ההתרחבות ואת האילוץ התקציבי. יש לציין בשרטוט גם נקודות חיתוך עם הצירים.

יש לשרטט במקום המיועד לכך בלבד:



שאלה 3 (35 נקודות):

במשק ה"גיבורים" צורכים 2 מוצרים: חלב (X) ולחם (Y).

מחיר חלב (X) הינו 4 ₪ ומחיר לחם (Y) הינו 3 ₪.

התקציב של המשק לרכישת מוצרים עומד על 8400 ₪.

כמו כן, ידוע שפונקציית התועלת של המשק מצריכה של חלב ולחם הינה:

$$U(x, y) = 4x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$$

הניחו כי המשק מעוניין למקסם את התועלת שלו בכפוף לתקציב שברשותו.

נסחו את בעיית הקיצון בצורה מתמטית בהתאם לנתונים מעלה.

פתרו את בעיית הקיצון.

כמות יחידות X על המשק לרכוש: _____; כמות יחידות Y על המשק לרכוש: _____;

ערך התועלת שהמשק ישיג: _____

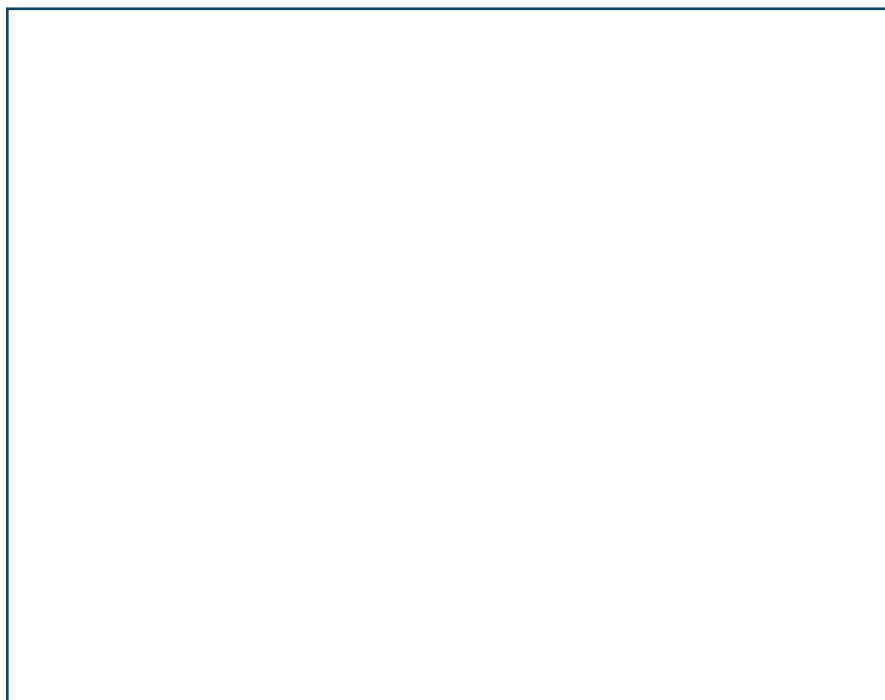
הערה: יש להראות באמצעות חישוב ערך פונקציית המטרה בנקודה אחרת כי אכן קיבלתם נקודת מקסימום.

הסבר: הציגו חישוב מתאים:

ידוע שתקציב המשק עלה ב-10% בעקבות מספר שינויים שהתרחשו במשק. יש למצוא בכמה בקירוב תשתנה התועלת של המשק.

שרטטו באותה מערכת צירים את קו הגובה עבור התועלת המקסימלית שמצאתם, את קו ההתרחבות ואת האילוץ התקציבי. יש לציין בשרטוט גם נקודות חיתוך עם הצירים.

יש לשרטט במקום המיועד לכך בלבד:



$$P_x \quad 4$$

$$P_y \quad 3$$

$$\text{Price} : 3 \quad \text{כסף לכל יחידה}$$

$$8400$$

סך הוצאות
האזנה

$$U = 4 \cdot x^{0.25} \cdot y^{0.33}$$

$$\max \quad 4 \cdot x^{0.25} \cdot y^{0.33} \quad \text{s.t.} \quad 4 \cdot x + 3 \cdot y = 8400$$

2.

$$L = 4 \cdot x^{0.25} \cdot y^{0.33} - \lambda \cdot (4x + 3y - 8400)$$

$$L'_x = 4 \cdot 0.25 \cdot x^{-0.75} \cdot y^{0.33} - \lambda \cdot 4 = 0$$

$$4 \cdot 0.25 \cdot x^{-0.75} \cdot y^{0.33} = 4\lambda \quad / : 4$$

$$0.25 \cdot x^{-0.75} \cdot y^{0.33} = \lambda$$

$$L'_y = 4x^{0.25} \cdot 0.33 \cdot y^{-0.67} - \lambda \cdot 3 = 0$$

$$4x^{0.25} \cdot 0.33 \cdot y^{-0.67} = 3\lambda \quad / : 3$$

$$1.33 \cdot x^{0.25} \cdot y^{-0.67} = \lambda$$

$$0.44 \cdot X^{0.25} \cdot y^{-0.67} = \lambda$$

$$0.25 \cdot X^{-0.75} \cdot y^{0.33} = \lambda$$

: 2 2 2

$$0.44 \cdot X^{0.25} \cdot y^{-0.67} = 0.25 \cdot X^{-0.75} \cdot y^{0.33}$$

: $y = 8.64 X^{0.33}$

$$\frac{0.44 \cdot X^{0.25} \cdot y^{-0.67}}{X^{-0.75}} = 0.25 \cdot y^{0.33}$$

$$\frac{0.44 \cdot X^{0.25}}{X^{-0.75}} = \frac{0.25 \cdot y^{0.33}}{y^{-0.67}}$$

$$0.44 \cdot X^1 = 0.25 \cdot y$$

$$1.776 \cdot X = y$$

: פירוק לצורת המדרג

$$4 \cdot x + 3 \cdot y = 8400$$

$$4 \cdot x + 3(1.776x) = 8400$$

$$4x + 5.33x = 8400$$

$$9.33x = 8400 \quad / : 9.33$$

$$(ל x) \quad x = 900 \rightarrow$$

$$y = 1.776 \cdot x$$

$$(ל y) \quad y = 1598$$

: פירוק לצורת המדרג

$$4 \cdot x + 3 \cdot y = 8400$$

900 1598

$$0.25 \quad 0.33$$

$$u = 4 \cdot x + 3 \cdot y$$

900 1598

נקודת
 המזל
 250

: Max נקודה זו היא נקודת הקצה

$$4 \cdot x + 3 \cdot y = 8400$$

↓
x=0 נ' 3)

i

$$3y = 8400$$

$$y = 2800$$

$$(0, 2800)$$

$$U = 4 \cdot X^{0.25} \cdot Y^{0.33}$$

דגל מרדכי
0

$$U = 250$$

$$(900, 1598)$$

>

$$U = 0$$

$$(0, 2800)$$

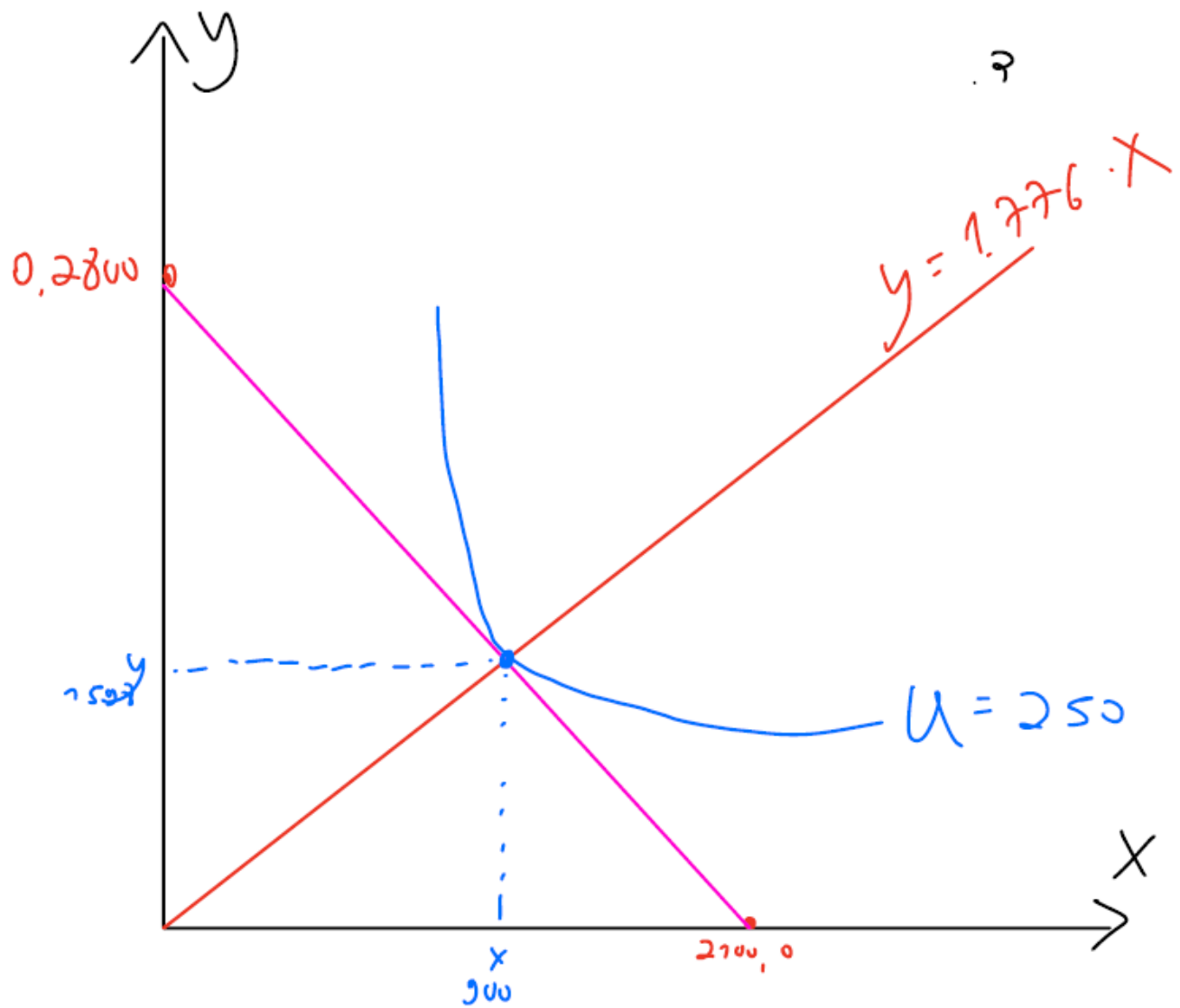
לפי הוכחתו של הנק' 900, 1598
לכאורה אין הגיון להזניק.

$$10 = \lambda' \quad 2$$

$$0.25 \cdot X^{-0.25} \cdot Y^{0.33} = \lambda$$

$$0.0177 = \lambda$$

0.177 ✓ $\leftarrow$ λ : 45° line
 0.0177
 10



ה y יוצא $1.776 \cdot X = y$

ת.פ.ס.:

$$4 \cdot x + 3 \cdot y = 8400$$

תנאי קצה, y ו- $x=0$:

$$3y = 8400$$

$$y = 2800$$

$$(0, 2800)$$

תנאי קצה, x ו- $y=0$:

$$4x = 8400$$

$$x = 2100$$

$$(2100, 0)$$

$$U = 4 \cdot x^{0.25} \cdot y^{0.33}$$

לחשב את $x^{0.25}$ ו- $y^{0.33}$ באמצעות מחשב

שאלה 4 (35 נקודות):

מפעל מייצר שני סוגי נוזלים, נוזל A ונוזל B.

את הכמויות שלהם נסמן ב- x נוזל A וב- y נוזל B.

המפעל מוכר את נוזל A במחיר 20 ש"ח לליטר,

המפעל מוכר את נוזל B במחיר 40 ש"ח לליטר.

x כמות נוזל A

y כמות נוזל B

$P_x = 20$ מחיר ליטר A

$P_y = 40$ מחיר ליטר B

פונקציית הוצאות של המפעל בש"ח הינה:

$$\underline{Tc(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 8y}$$

המפעל מעוניין להגיע לפדיון של 600 ש"ח במינימום הוצאות.

א. (5 נקודות) חשבו את פונקציית הפדיון של המפעל.

$$\begin{aligned} R &= P_x \cdot x + P_y \cdot y \\ R &= 20 \cdot x + 40 \cdot y \end{aligned}$$

ב. (5 נקודות) נסחו את הבעיה בצורה מתמטית – להגיע להוצאות מינימליות בפדיון השווה ל 600 ש"ח.

המפעל מעוניין להגיע לפדיון של 600 ש"ח במינימום הוצאות

להוצאה

מנסחים את הבעיה באופן מתמטי לפי תבנית מהטבלה:

S

המטרה	בכפוף ל	
MIN	הוצאות	S.t
MAX	הכנסות	S.t
MAX	רווח	S.t
MAX	כמות מיוצרת	S.t

המספר החופשי שנתון תמיד שייך לאילוץ שעלינו לבנות.

פונקציית הוצאות של המפעל בש"ח הינה:

$$Tc(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 8y$$

המפעל מעוניין להגיע לפדיון של 600 ש"ח במינימום הוצאות.

להוצאה

האילוץ

$$\min \text{האילוץ} \quad x^2 + y^2 - 4x - 8y \quad \text{s.t.} \quad 20 \cdot x + 40 \cdot y = 600$$

גזירה

$$L = x^2 + y^2 - 4x - 8y - \lambda \cdot (20 \cdot x + 40 \cdot y - 600)$$

ג. חשבו את הכמות של x ושל y אשר יביאו את ההוצאות המינימליות כאשר הפדיון שווה 600 ש"ח.

תוצאת הנקודה שמצאתם היא: $\begin{matrix} x & y \\ 6, & 12 \end{matrix}$

לאחר שפתרתם את בעיית הקיצון,

הראו ע"י חישוב של ערך פונקציית המטרה בנקודה אחרת

כי אכן קיבלתם נקודת מינימום.

המשק L :

$$L = x^2 + y^2 - 4x - 8y - \lambda(20 \cdot x + 40 \cdot y - 600)$$

$$L'_x = 2x - 4 - \lambda \cdot 20 = 0$$

$$2x - 4 = 20 \cdot \lambda \quad / : 20$$

$$\boxed{0.1x - 0.2 = \lambda}$$

$$L'_y = 0 + 2y - 8 - \lambda \cdot 40 = 0$$

$$2y - 8 = 40 \cdot \lambda \quad / : 40$$

$$\boxed{0.05y - 0.2 = \lambda}$$

נשווה λ ונמצא:

$$0.05y - 0.2 = 0.1x - 0.2$$

$$0.05y = 0.1x \quad / : 0.05$$

$$\boxed{y = 2 \cdot x}$$

$$y = 2 \cdot x$$

רועי עידן- מומחה להכנת סטודנטים למבחני המכללה למנהל www.roy-idan.co.il
 סרטוני הכנה למבחן (קורסים מקוונים) ושעורים פרטיים בסטטיסטיקה, כלכלה ומתמטיקה: 052-546-6016

נניח במקרה זה:

$$20 \cdot x + 40 \cdot y = 600$$

$$20x + 40 \cdot 2x = 600$$

$$100x = 600$$

$$x = 6$$

נחזיק:

$$y = 2x$$

$$y = 2 \cdot 6$$

$$y = 12$$

$$(x, y, \lambda) = (6, 12, 0.4)$$

$$0.05y - 0.2 = \lambda$$

$$0.4 = \lambda$$

שלב 4 ואחרון:

הוכחה שהנקודה שמצאנו אכן הביאה למינימום שביקשו
(או למקסימום שביקשו בשאלה):

את הנקודה שמצאנו בסוף שלב 3 נציב בפונקציה שקיבלנו
בתחילת השאלה (לא להציב באילוץ).

$$T_c = x^2 + y^2 - 4x - 8y$$

נציב הנ' 6, 12
החלוצי

$$T_c = 6^2 + 12^2 - 4 \cdot 6 - 8 \cdot 12$$

$$T_c = 60$$

אלו החלוצי החלוצי

$$T_c = 60$$

ניגש לאילוץ ונציב למשל $X=0$ ונגלה Y .
את הנקודה החדשה שהומצאה נציב בפונקציה שקיבלנו
בתחילת השאלה
(לא להציב באילוץ כי כבר עבדנו עימו לפני רגע).

החלוצי

$$20 \cdot X + 40 \cdot Y = 600$$

נציב $X=0$ ונגלה Y

$$20 \cdot 0 + 40 \cdot Y = 600$$

$$Y = 15$$

$$(0, 15)$$

נציב

$$T_c = x^2 + y^2 - 4x - 8y$$

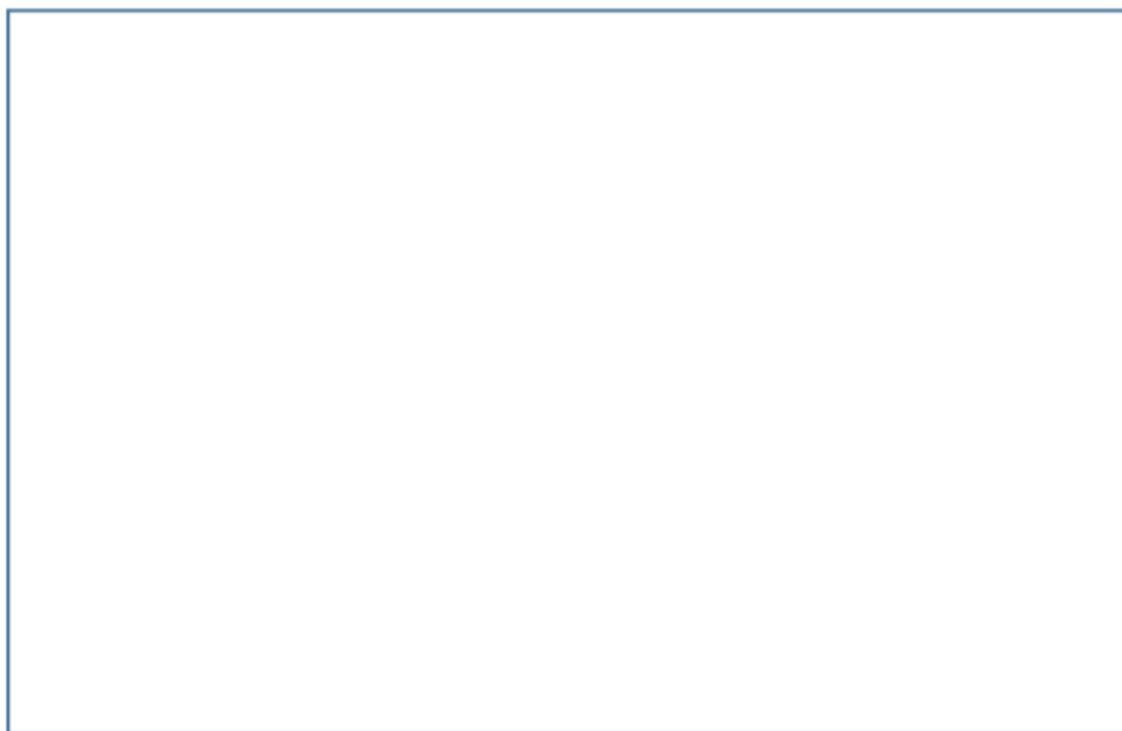
$$T_c = 15^2 - 8 \cdot 15$$

$$T_c = 105$$

נערוך השוואה בין שתי התוצאות אשר תמיד תוכיח

שהנקודה שמצאנו בשלב 3 היא תקינה ונכונה!

ד. (5 נקודות) שרטטו באותה מערכת צירים את קו הגובה עבור ההוצאות המינימליות שמצאתם, את האילוץ של הפדיון ואת קו ההתרחבות של הוצאות המפעל.
יש לשרטט במקום המיועד לכך בלבד:



ק. הכנה של קו זה : CLC

$$TC = X^2 + y^2 - 4X - 8y = 60$$

ש"ה
מינימום
ההוצאות
שמצאנו

תוקף: אינן x^2 ! y^2 יש אלו מקדים, מקדים במהלך

אם, אצלנו מקדים במהלך.

המבחן הקובע של המהלך

רועי עידן- מומחה להכנת סטודנטים למבחני המכללה למנהל www.roy-idan.co.il
סרטוני הכנה למבחן (קורסים מקוונים) ושיעורים פרטיים בסטטיסטיקה, כלכלה ומתמטיקה: 052-546-6016

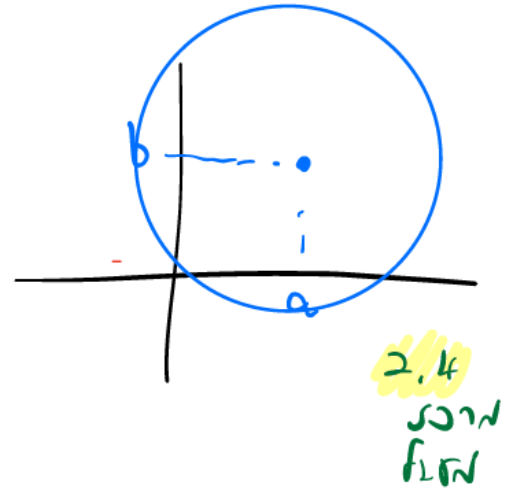
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y = 60$$

a, b
מרכז

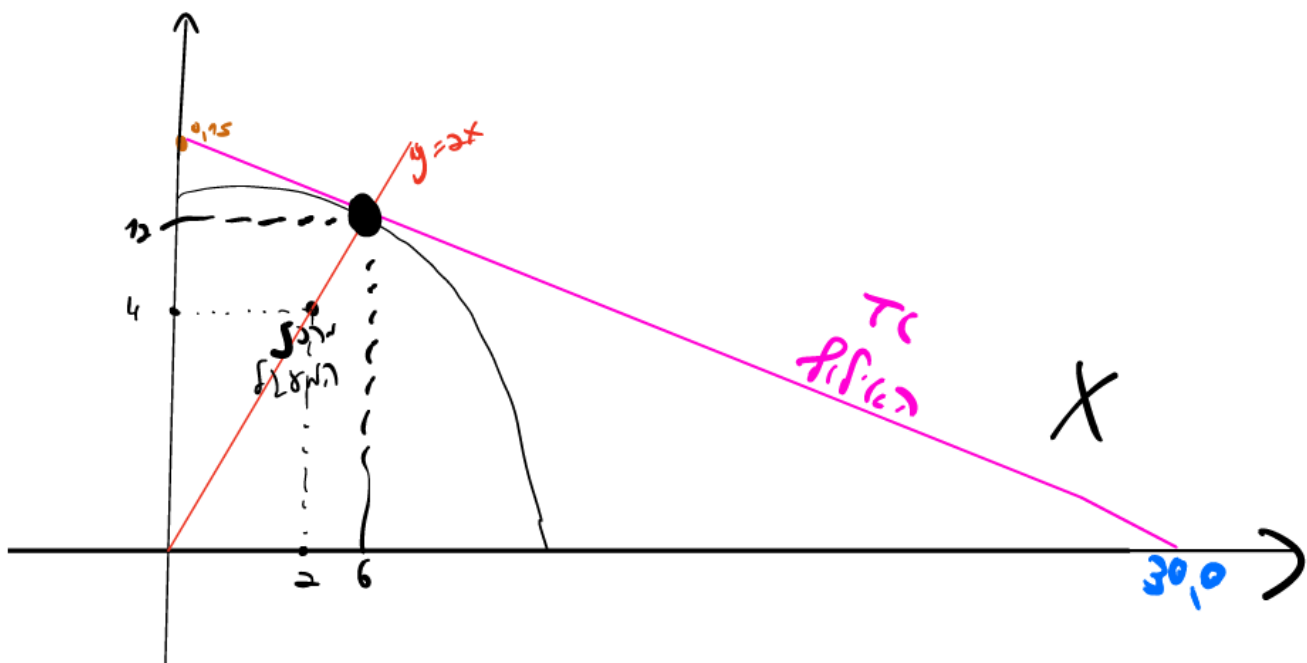
$$x^2 - 4x + y^2 - 8y = 60$$

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 60$$



$$(x-2)^2 - 4 + (y-4)^2 - 16 = 60$$

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 80$$



! $y = 200 \cdot x$
 תחילה $y = 200 \cdot x$

$y = 2x$
 תחילה $y = 2x$

האילוץ:
 $20x + 40 \cdot y = 600$

הגדרת x
 y
 נניח $x=0$
 $40y = 600$
 $y = 15$
 $0,15$

הגדרת x
 y
 נניח $y=0$
 $20x = 600$
 $x = 30$
 $30,0$

ה. (5 נקודות) אם פדיון המפעל יגדל ל 660 ש"ח, בכמה יגדלו בקרוב הוצאות היצור?

הגידול בהוצאות היצור: 24 re

חישוב:

$$\frac{\text{ג'ט'ו'א}}{\lambda} = \frac{\text{ג'ט'ו'א}}{0.4 \cdot 60}$$

24

$$\begin{array}{l} 660 - 600 = \frac{\text{הש'ו'א}}{60} \\ \text{נ'ו'א כ'ר' (80 ש'ח)} \quad \text{נ'ו'א כ'ר' (60 ש'ח)} \end{array}$$

שאלה הפוכה לתרגול בבית:

תאריך הבחינה: 28.6.2021

שאלה 2 (35 נקודות):

לרשות משקיע 25,000 שקלים אותם הוא מפזר בין מניות לאגרות חוב. נסמן: מספר המניות שירכוש המשקיע x , מחיר מנייה 10 שקלים.

מספר אגרות החוב שירכוש המשקיע y , מחיר אגרת החוב 30 שקלים.

פונקציית הפדיון של המשקיע $R(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ באלפי שקלים.

מהם כמויות המניות ואגרות החוב שעל המשקיע לרכוש על מנת לקבל פידיון מקסימלי תחת מגבלת התקציב.

א. (5 נקודות) נסחו את בעיית הקיצון בהתאם לנתונים מעלה.

ב. (15 נקודות) פתרו את בעיית הקיצון והראו באמצעות חישוב ערך פונקציית המטרה בנקודה אחרת כי אכן קיבלתם נקודת מקסימום.

תוצאת הנקודה שמצאתם: $(1000, 500)$

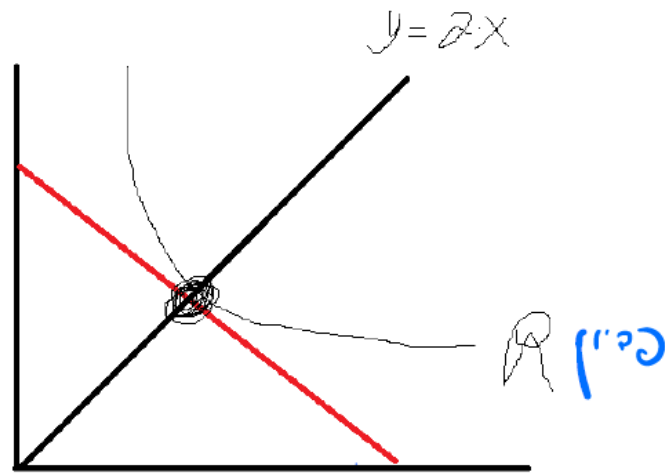
הסבר: הציגו חישוב מתאים.

ג. (6 נקודות) אם התקציב של המשקיע עולה ב 1000 שקלים בכמה בקירוב יעלה הפידיון

הסבר:
$$\frac{1}{6150} \cdot 1000 = 0.1626$$

9 (נקודות) שרטטו באותה מערכת צירים את קו הגובה עבור הפדיון המקסימלי שמצאתם, את האילוח התקציבי ואת קו ההתרחבות של הפירמה.

יש לשרטט במקום המיועד לכך בלבד:



רועי עידן- מומחה להכנת סטודנטים למבחני המכללה למנהל www.roy-idan.co.il
 סרטוני הכנה למבחן (קורסים מקוונים) ושיעורים פרטיים בסטטיסטיקה, כלכלה ומתמטיקה: 052-546-6016

(כ)
 הנתון
 מהם כפוף

max

כפוף
 $\sqrt[3]{x^2} \sqrt{y}$

st $p_x \cdot x + p_y \cdot y = 25$

$L = \sqrt[3]{x^2} \sqrt{y} - \lambda \cdot (p_x \cdot x + p_y \cdot y - 25)$

נושא חדש: נקודות סטציונריות

בעיה כלכלית ללא אילוץ (ללא המספר החופשי)

של
1.

אם מדובר בפונקציית ההוצאות **TC**
אז נקבל אותה מוכנה (בנויה).

אם מדובר בפונקציית הרווח אז נבנה אותה כך:

$$\pi = TR - TC$$

2.

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{נעבור עם} \\ &\text{השוואת} \\ &\text{ע' (פ' (X, Y))} \end{aligned}$$

3. נכין 3 נגזרות שניות, נסמן באותיות.

נפעיל את נוסחת D ונעבוד לפי חוקים

(הם מופיעים בדף) וכך ניתן תפקידים לנקודות:

MIN MAX אוקף

A

$$\underbrace{f'_x}_{\text{מינימום}} \quad \underbrace{x}_{\text{מינימום}}$$

B

$$\underbrace{f'_x}_{\text{מינימום}} \quad \underbrace{y}_{\text{מינימום}}$$

החזק'ן בקל' נוסחא!
חזק'ן:

C

$$\underbrace{f'_y}_{\text{מינימום}} \quad \underbrace{y}_{\text{מינימום}}$$

$$D = A \cdot C - B^2$$

אם $D < 0$ הנק' איביל.

אם $A > 0$ הנק' מינימום

אם $A < 0$ הנק' מקסימום

שאלה 1 (25 נקודות):

יצרן מחשבים יכול לשווק את המחשבים שהוא מייצר לשני שווקים – שוק תל אביב ושוק חיפה.
אם ימכור X יחידות בשוק תל אביב - המחיר ליחידה בשוק זה יהיה:

$$P_x = 100 - 10x$$

אם ימכור Y יחידות בשוק חיפה - המחיר ליחידה בשוק זה יהיה:

$$p_y = 200 - 20y$$

עלות היצור הכוללת (TC) של היצרן נתונה ע"י הפונקציה הבאה:

$$TC(x, y) = 180 + 40x + 40y$$

יש לענות על הסעיפים הבאים:

א. כמה יחידות ישווק היצרן לכל שוק על מנת להשיא (למקסם) את רווחיו?
הערה: יש להוכיח שאכן מדובר ברווח מקסימלי.

ב. מה יהיה הרווח המקסימלי של היצרן בש"ח?

ג. הניחו כי היצרן חתם לאחרונה על חוזה שבו התחייב לייצר לשווקים בת"א וחיפה יחד כמות של 10 יחידות בדיוק. במצב זה, מה יהיה הרווח המקסימלי של היצרן? הערה: יש להראות באמצעות חישוב ערך פונקציית המטרה בנקודה אחרת כי אכן קיבלתם נקודת מקסימום.

נקודות סטציונריות בשילוב בעיה כלכלית

שאלה 4 (15 נקודות):

נתונה פונקציית עלויות הבאה, משימוש ב- X יחידות גורם יצור A וב- Y יחידות גורם ייצור B

$$Tc(x, y) = \ln(-x^3 - 3xy^2 + 15x + 12y)$$

הבהרה: ניתן להניח כי כמויות גורמי הייצור חיוביות.

$$x > 0, y > 0$$

א. (7 נקודות) מצאו נקודות סטציונריות וסווגו את סוג הקיצון אם קיים (7 נקודות). ✓

הנקודה/נקודות הן:

סעיף ב' (2 נקודות):

חשבו את העלות הכוללת המתקבלת משימוש ב-גורם ייצור אחד מסוג A ו בגורם ייצור אחד מסוג B : $x=1, y=1$

סעיף ג' (2 נקודות):

מצאו את שיפוע המשיק לקו הגובה בנקודה (1,1) והסבירו את משמעות השיפוע שקיבלתם.

מתוך דף הנוסחאות:

$$\left(\begin{array}{c} \text{שיפוע} \\ \text{המשיק} \\ \text{לקו הגובה} \end{array} \right) = m = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{f'_x}{f'_y}$$

תכונה:
כיצד נגזרת חזקה:

$$\ln f' = \frac{f'}{f}$$

$$\ln(ax)' = \frac{a}{ax} \quad \text{קו}$$

סעיף 4 (המשפט).

$$f(x, y) = \ln(-x^3 - 3xy^2 + 15x + 12y)$$

$$f'_x = \frac{-3x^2 - 3y^2 + 15}{-x^3 - 3xy^2 + 15x + 12y} = 0 \quad \text{. / c}$$

- נון y

$$f'_y = \frac{-3x \cdot 2y + 12}{-x^3 - 3xy^2 + 15x + 12y} = 0$$

- נון x

$$f'_x = -3x^2 - 3y^2 + 15 = 0$$

$$f'_y = -3x \cdot 2y + 12 = 0 \rightarrow -6xy + 12 = 0$$

$$12 = 6xy \quad / : 6x$$

$$\frac{12}{6x} = y$$

$$\frac{2}{x} = y$$

$$f'_x = -3x^2 - 3y^2 + 15 = 0$$

$$f'_x = -3x^2 - 3 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 + 15 = 0$$

$$f'_x = -3x^2 - 3 \cdot \frac{4}{x^2} + 15 = 0$$

$$f'_x = -3x^2 - \frac{12}{x^2} + 15 = 0$$

$$-3x^2 - \frac{12}{x^2} + 15 = 0$$

$$x^2 = t \quad (\text{substitution})$$

$$\begin{array}{r} t \quad 1 \quad t \quad t \\ -3t \quad -\frac{12}{t} \quad +15 = 0 \\ \hline 1 \quad t \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

$$\frac{\quad}{t}$$

$$-3t^2 - 12 + 15t = 0$$

$$\text{Mid } 5 \ 3$$

$$t = 4$$

$$x^2 = 4$$

$$\begin{array}{l} / \quad \backslash \\ x = 2 \quad x = -2 \\ \swarrow \\ x > 0 \end{array}$$

$$t = 1$$

$$x^2 = 1$$

$$\begin{array}{l} / \quad \backslash \\ x = 1 \quad x = -1 \\ \swarrow \\ x > 0 \end{array}$$

נבדוק נקודות

$$\left(\begin{array}{c} x \\ 1, 2 \\ 2, 1 \end{array} \right)$$

←

$$\boxed{\frac{2}{x} = y}$$

נבדוק נקודות

A $\underbrace{f'_x}_{\text{min}} \underbrace{x}_{\text{min}}$

$-3 \geq 0$

B $\underbrace{f'_x}_{\text{min}} \underbrace{y}_{\text{min}}$

C $\underbrace{f'_y}_{\text{min}} \underbrace{y}_{\text{min}}$

$D = A \cdot C - B^2$
 Min $\hat{y}$ $A > 0$, $D > 0$ $C < 0$
 Max $\hat{y}$ $A < 0$, $D > 0$ $C < 0$

$f'_x = -3x^2 - 3y^2 + 15$

$f'_y = -3x \cdot 2y + 12 \Rightarrow -6xy + 12$

A $f'_{xx} = -6x$

B $f'_{xy} = -6y$

C $f'_{yy} = -6x$

$D = A \cdot C - B^2$

$D = -6x \cdot -6x - (-6y)^2$

$D = 36x^2 - 36y^2$

$$(2, 1)$$

$$D = 36\ddot{x}^2 - 36\ddot{y}^2$$

$$D > 0$$

$$A = -6x$$

$$A = -6 \cdot 2 = -12$$

$$A < 0$$

$$\max_{(2,1)} \hat{f}$$

(ב) קיבלנו נק' $(1, 1)$ והוכיח

שנצטרך כן להקדיש משאב

שנצטרך להשקיע הכסף:

$$TC(1,1) = 3.13$$

$$(1, 2)$$

$$D = 36 \cdot 1^2 - 36 \cdot 2^2$$

$$D < 0$$

הנק' 1,2 אינה

חשוב לזכור - שינוי הליניאריות
הליניאריות

(2)

$$f'_x = \frac{-3x^2 - 3y^2 + 15}{-x^3 - 3xy^2 + 15x + 12y}$$

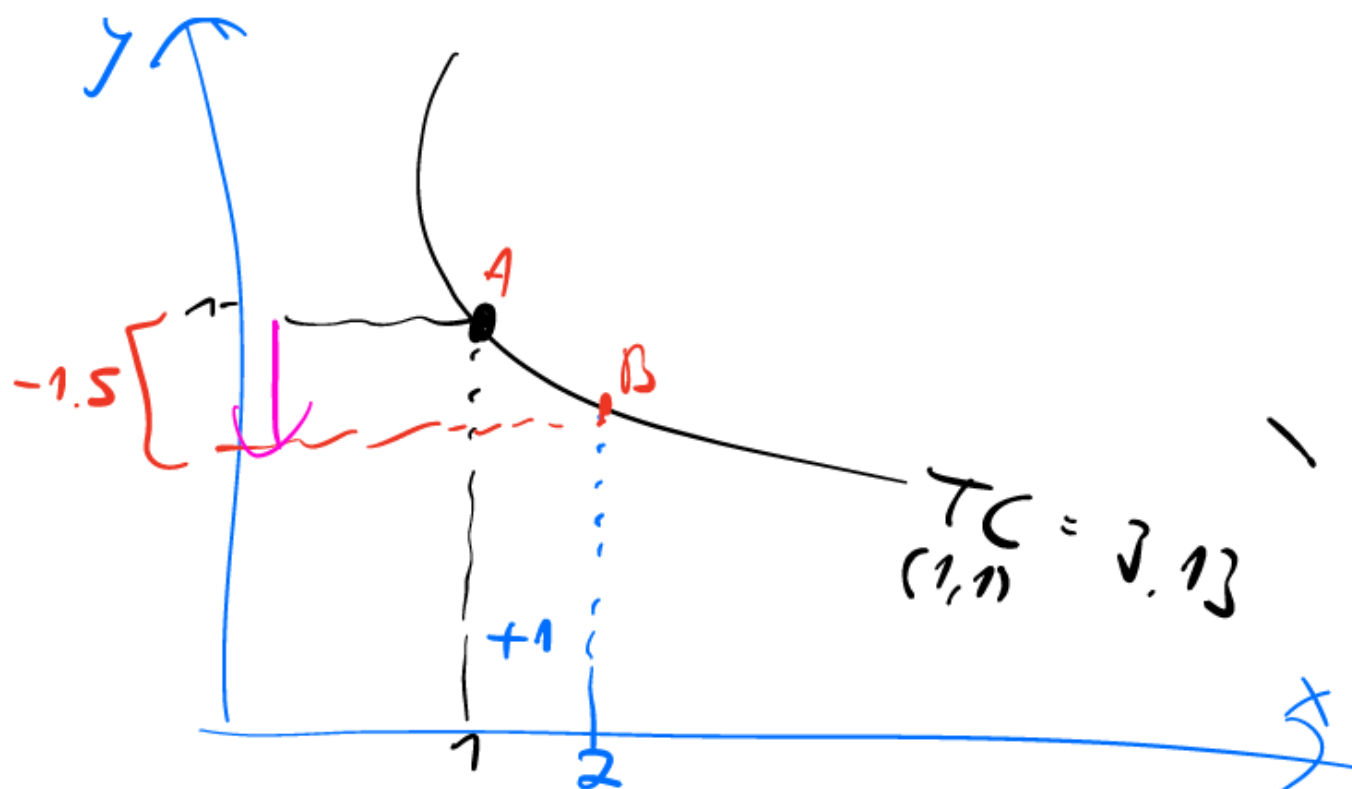
$$f'_y = \frac{-3x \cdot 2y + 12}{-x^3 - 3xy^2 + 15x + 12y}$$

נקודת הסף $(1,1)$
כדי f'_x ו- f'_y

$$f'_x(1,1) = \frac{9}{23}$$

$$f'_y(1,1) = \frac{6}{23}$$

$$\text{שינוי} = - \frac{\frac{9}{23}}{\frac{6}{23}} = -1.5$$



הערה חשובה

אם x הוא מספר שלם ו- y הוא מספר שלם
 אז $TC(x, y)$ הוא מספר שלם
 כלומר $TC(1, 1) = 3.13$

נק סטציונריות- תרגול נוסף

ממבחן 8.7.22:

שאלה 1: (20 נקודות)

פונקציית הפדיון של מפעל ממכירת שני מוצרים A ו B הינה $R(x, y) = 7xy + 73x - 65y$
המפעל מייצר x מוצרים מסוג A ו y מוצרים מסוג B .
פונקציית העלות הכוללת לייצור ומכירה של מוצרים אלו $Tc(x, y) = 3x^2 + 5y^2$.
א. (5 נקודות) מצאו את פונקציית הרווח $\pi(x, y)$.

ב. (10 נקודות) כמה מוצרים מכל סוג על המפעל לייצר על מנת לקבל רווח מקסימלי. מהו הרווח במקרה זה.
על המפעל לייצר: _____
חישוב:

ג. (5 נקודות) חשבו את הפדיון השולי והעלות השולית של כל מוצר בנקודת הקיצון שמצאתם והסבירו את המשמעות הכלכלית.

אן נט חופסי (אן אילוי)

שאלה 1: (20 נקודות)

כ"א

פונקציית הפדיון של מפעל ממכרת שני מוצרים A ו B הינה $R(x,y) = 7xy + 73x - 65y$

המפעל מייצר x מוצרים מסוג A ו y מוצרים מסוג B.

פונקציית העלות הכוללת לייצור ומכירה של מוצרים אלו $Tc(x,y) = 3x^2 + 5y^2$.

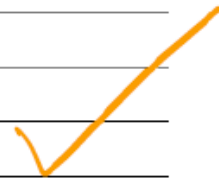
א. (5 נקודות) מצאו את פונקציית הרווח $\pi(x,y)$.

כ"א

$$\pi(x,y) = R(x,y) - Tc(x,y)$$

$$7xy + 73x - 65y - (3x^2 + 5y^2)$$

$$\pi(x,y) = 7xy + 73x - 65y - 3x^2 - 5y^2$$



ב. (10 נקודות) כמה מוצרים מכל סוג על המפעל לייצר על מנת לקבל רווח מקסימלי. מהו הרווח במקרה זה.

(25, 11)

על המפעל לייצר:

חישוב:

A 25 יחידות

B 11 יחידות

כ"א ב סתם נהי ה רווח ;

נצח הנה (25, 11):

$$\pi(25, 11) = 7(25)(11) + 73(25) - 65(11) - 3(25)^2 - 5(11)^2$$

$$25 \quad 25 \quad 11 \quad 25 \quad 11$$

$$\pi(25, 11) = 555$$

פירוק: חוקי קרנר (min וmax אלה לא ילכו)

אין בעיה בזה

$$n'x = 7y + 73 - 6x = 0$$

כלל זה לא ילך (כי יש בעיה)

חיבור

+

$$n'y = 7x - 65 - 10y = 0$$

כלל זה לא ילך (כי יש בעיה)

$$x - 3y + 8 = 0$$

$$x = 3y - 8 \rightarrow \text{נציב באחת המשוואות}$$

אנחנו באינך הסתירה:

$$7y + 73 - 6(3y - 8) = 0$$

$$7y + 73 - 18y + 48 = 0$$

$$-11y + 121 = 0 \quad 11y = 121$$

$$y = 11$$

$$x = 3y - 8$$

$$x = 25$$

$$(25, 11)$$

x y

שלב 3 :

היכרחי ששני הנק' יהיו
למשאלה שני הנק' זהים :

$$x' = 7y + 7x - 6x$$

כל הנק' של x זהה
(בניגוד)

$$y' = 7x - 6y - 10y = 0$$

כל הנק' של y זהה

3 נוספות שגויות :

$$x' = -6 \quad A$$

הנק' של x שגויה

$$y' = -10 \quad C$$

הנק' של y שגויה

$$y' = 7 \quad B$$

הנק' של y שגויה

שלב 4 :

$$D = A \cdot C - B^2$$

$$D = -6 \cdot -10 - (7)^2 \quad D = 11$$

$$D > 0 \quad \text{ולכן} \quad A < 0$$

-6

הנק' היחידה
שהיא (11, 7) שכן המשאלה לכל הנק' זהה

ג. (5 נקודות) חשבו את הפדיון השולי והעלות השולית של כל מוצר בנקודת הקיצון שמצאתם והסבירו את המשמעות הכלכלית.

$$TC = 3x^2 + 5y^2$$

העלות

מחיר = מחיר
מחיר : מחיר : מחיר
אין מחיר

$$TC'_x = 6x = 150$$

מחיר : מחיר : מחיר

אין נגזרת אחר x באיזה (עקומה) הנגזרת אחר x בטבלה
150 הנגזרת

$$TC'_y = 10y = 110$$

מחיר : מחיר : מחיר

אין נגזרת אחר y באיזה (עקומה) הנגזרת אחר y בטבלה
110 הנגזרת

$$R(x, y) = 7xy + 73x - 65y$$

$$R'_x = 7y + 73 = 150$$

מחיר : מחיר : מחיר

אין נגזרת אחר x באיזה (עקומה) הנגזרת אחר x בטבלה
150 הנגזרת

$$R'_y = 7x - 65 = 110$$

מחיר : מחיר : מחיר

אין נגזרת אחר y באיזה (עקומה) הנגזרת אחר y בטבלה
110 הנגזרת

שאלה 2 (20 נקודות):

סעיף א':

נתונה הפונקציה הבאה:

$$g(x, y) = x^4 \cdot y^2 - \frac{x^{2.5}}{\sqrt{y}} \cdot f\left(\frac{x^{1.5}}{\sqrt{y}}, \frac{y^{1.5}}{\sqrt{x}}\right) + \frac{h(x^3, y^3)}{x^{20} \cdot y \cdot 3^2}$$

ידוע כי הפונקציות $f(x, y)$, $h(x, y)$ ו- $g(x, y)$ הינן פונקציות הומוגניות.מצאו את סדר ההומוגניות של הפונקציות $f(x, y)$, $h(x, y)$ ו- $g(x, y)$

סעיף ב' :

רשת למכירה פרגולות אלומיניום משתמשת בשני גורמי יצור – עובדים (X) ומכונות (Y).
להלן הפונקציה אשר מתארת את כמות הפרגולות שהחברה יכולה לייצר :

$$f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x}{y}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{10}{y^{-\frac{4}{3}}}$$

מנכ"ל הרשת מעוניין להגדיל את כמות הפרגולות המיוצרת ולצורך כך התייעץ עם 2 כלכלנים וזו דעתם :
כלכלן 1 טען - הגדלת כמות כל גורמי הייצור פי 2 תגדיל את הכמות המיוצרת פי 4 בדיוק.
כלכלן 2 טען - הגדלת כמות כל גורמי הייצור פי 2 תגדיל את הכמות המיוצרת ביותר מפי 4.
איזה כלכלן צודק?

1. כלכלן 1
2. כלכלן 2
3. שניהם צודקים
4. שניהם טועים

הסבירו (ללא הצבת מספרים) :

הומוגניות:

ממועד ב 2023:

שאלה 3 (20 נקודות):

סעיף א' (10 נקודות):

ידוע כי הפונקציה f הומוגנית מסדר r .

מצאו את r אם נתון וידוע כי: $64 \cdot f(100,30) = f(200,60)$

אם לא ניתן למצוא את r יש לנמק מדוע.

הסבר:

נתונה $f(x, y)$ הומגנית סדר $\alpha \neq 0$ הינה פונקציה חיובית לכל (x, y) . מצאו את α אם נתון

$$81f(-1, 5) = f(3, -15) \quad \text{כי}$$

יש לענות על הסעיפים הבאים:

א. (4 נקודות)

כמה היא ?
אם לא ניתן לחשב, נמקו.

הסבר:

חלק ב' :שאלה 3 (15 נקודות):

נתון כי $g(x,y)$ הומוגנית סדר 3 וכן כי $f(x,y)$ הומוגנית סדר α
 א. (8 נקודות) נגדיר פונקציה:

$$h(x,y) = \frac{g(x,y) + x^3}{f(3x, 3y)}$$

האם $h(x,y)$ הומוגנית?

תשובה: _____

הסבר:

ב. (5 נקודות) מה צריך להיות הערך של α על מנת ש $T(x,y)$ תהיה הומוגנית?

$$T(x,y) = f(x,y) + y^2 \sqrt{x}$$

ג. (5 נקודות) ללא קשר לסעיפים א+ב, נתון כי $R(x,y)$ הומוגנית סדר 3 וכי $Q(x,y)$ הומוגנית סדר 6, חשבו את β

$$Q(x,y) = R\left(\frac{x^3 + y^3}{x^\beta}, \frac{3x^3 + 2y^3}{y^\beta}\right)$$

הולדג'ר

$$x \rightarrow t \cdot x$$

$$y \rightarrow t \cdot y$$

אם מביט לביטול המין ה- t בלבד נראה כי
הולדג'ר מסיר את t .

$$f = x^2 + y^2$$

$$f = (t \cdot x)^2 + (t \cdot y)^2$$

$$t^2 \cdot x^2 + t^2 \cdot y^2$$

$$f = t^2 \cdot (x^2 + y^2)$$

אם f הולדג'ר מסיר 2 .

שאלה 3 (15 נקודות):

נתון כי $g(x,y)$ הומוגנית סדר 3 וכן כי $f(x,y)$ הומוגנית סדר α

א. (8 נקודות) נגדיר פונקציה:

$$h(x,y) = \frac{g(x,y) + x^3}{f(3x, 3y)}$$

האם $h(x,y)$ הומוגנית?

תשובה: _____

ג' הומו סדר 3

f הומו סדר 3

$$h = \frac{g(tx, ty) + (tx)^3}{f(3tx, 3ty)}$$

$$h = \frac{g(tx, ty) + t^3 \cdot x^3}{f(3tx, 3ty)}$$

$$h = \frac{t^3 \cdot g(x, y) + t^3 \cdot x^3}{t \cdot f(3x, 3y)}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$h = \frac{t^3 \cdot (g(x, y) + x^3)}{t^{\alpha} \cdot f(3x, 3y)}$$

$$\frac{t^4}{t^{0.5}} = t^{3.5}$$

$$h = t^{3-\alpha} \cdot \frac{g(x, y) + x^3}{f(3x, 3y)}$$

השבר
פועק
ה'קור'
ה' h' הולך.

$$h(x, y) = \frac{g(x, y) + x^3}{f(3x, 3y)}$$

h הולך ל-0 $3-\alpha$ $t \rightarrow \infty$

ב. (5 נקודות) מה צריך להיות הערך של α על מנת ש $T(x,y)$ תהיה הומוגנית?

$$T(x,y) = f(x,y) + y^2 \sqrt{x}$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$T = f(tx, ty) + (ty)^2 \cdot \sqrt{tx}$$

$$T = f(tx, ty) + t^2 \cdot y^2 \cdot \sqrt{t} \sqrt{x}$$

$$T = f(tx, ty) + t^2 \cdot y^2 \cdot t^{0.5} \sqrt{x}$$

$$T = t \cdot f(x, y) + t^{2.5} \cdot y^2 \cdot \sqrt{x}$$

18. $\propto$ הדרגה 2.5:

$$T = t^{2.5} \cdot f(x, y) + t^{2.5} \cdot y^2 \cdot \sqrt{x}$$

$$T = t^{2.5} \cdot (f(x, y) + y^2 \sqrt{x})$$

הסימן נשאר זהה

$$T(x, y) = f(x, y) + y^2 \sqrt{x}$$

רק כאן $\propto = 2.5$ נילמד מהצורה t

כגורם לשלש ולרשם שבתוך T הוא

ג. (נקודות) ללא קשר לסעיפים א+ב, נתון כי $R(x, y)$ הומוגנית סדר 3 וכי $Q(x, y)$ הומוגנית סדר 6, חשבו את

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$(t \cdot x)^4 = t^4 \cdot x^4 \quad Q(x, y) = R\left(\frac{x^3 + y^3}{x^6}, \frac{3x^3 + 2y^3}{y^6}\right)$$

$$Q = R\left(\frac{t^3 x^3 + t^3 y^3}{(tx)^6}, \frac{3 \cdot t^3 x^3 + 2t^3 y^3}{(ty)^6}\right)$$

$$Q = R\left(\frac{t^3 x^3 + t^3 y^3}{t^6 \cdot x^6}, \frac{3 \cdot t^3 x^3 + 2t^3 y^3}{t^6 \cdot y^6}\right)$$

$$Q = R \left(\frac{t^3(x^3+y^3)}{t^B \cdot x^B}, \frac{t^3(3x^3+2y^3)}{t^B \cdot y^B} \right)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$Q = R \left(\frac{t^{3-B} \cdot (x^3+y^3)}{x^B}, \frac{t^{3-B} \cdot (3x^3+2y^3)}{y^B} \right)$$

$$Q = t^{(3-B) \cdot 3} \cdot R \left(\frac{x^3+y^3}{x^B}, \frac{3x^3+2y^3}{y^B} \right)$$

ה t^{3-B} שם של R פחות R של R ב-3.
 " R של R ב-3" R של R ב-3.

ב-3 של R

$$Q = t^{9-3B} \cdot R \left(\frac{x^3+y^3}{x^B}, \frac{3x^3+2y^3}{y^B} \right)$$

ה-3 של R של R ב-3
 אם Q הוא R ב-3
 $6 = 9 - 3B$

$$3\beta = 3$$

$$\boxed{\beta = 1}$$



$$Q = t^{\square} \cdot R(\sim)$$

$$Q \text{ ממו } t \text{ מ } t^{\square} \text{ מ } R(\sim)$$

גרדיאנט ושימושיו

שאלה 5 (10 נקודות):

נתונה פונקציית תפוקה $f(x, y) = \ln(x^2 y^3)$ מ- x פועלים ו- y מכונות.

1. חשב את $\nabla f(1, 2)$

והסבר את המשמעות הכלכלית

2. חשב את $f(1, 2)$ והשתמשו בתוצאה לחשב את הערך המקורב של $f(1.1, 1.9)$, ללא שימוש במחשבון

3. מצא את השיפוע לקו הגובה בנקודה $(1, 2)$ והסבר את המשמעות הכלכלית

שאלה 4 (15 נקודות):

נתונה פונקציית עלויות הבאה, משימוש ב- X יחידות גורם יצור A וב- Y יחידות גורם ייצור B :

$$Tc(x, y) = \ln(-x^3 - 3xy^2 + 15x + 12y)$$

הבהרה: ניתן להניח כי כמויות גורמי הייצור חיוביות.

א. (7 נקודות) מצאו נקודות סטציונריות וסווגו את סוג הקיצון אם קיים (7 נקודות).

הנקודה/נקודות הן: _____

סעיף ב' (2 נקודות) :

חשבו את העלות הכוללת המתקבלת משימוש ב-גורם ייצור אחד מסוג A ו-גורם ייצור אחד מסוג B) :

סעיף ג' (2 נקודות) :

מצאו את שיפוע המשיק לקו הגובה בנקודה (1,1) והסבירו את משמעות השיפוע שקיבלתם.

ד'

סעיף ג' (4 נקודות) :

השתמשו בתוצאה שקיבלתם בסעיף ג' וחשבו בקירוב את (1.1,0.85). (ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה הסופית)

$Tc(x, y) = x^3 + y - 4\sqrt{xy} + 14$ נתונה הפונקציה

אשר הינה פונקציית עלות משימוש ב x יחידות גורם ייצור A ו y יחידות גורם ייצור B .

א. (4 נקודות) חשבו את $Tc(4,9) = C$ והשתמשו בתוצאה לחישוב מקורב של $Tc(3.9,8.9)$.

[illegible]

המסלול האקדמי המכללה למינהל



ב. (3 נקודות) מצאו את שיפוע המשיק לקו הגובה העובר בנקודה (4,9) והסבירו כלכלית.

שיפוע המשיק לקו הגובה הוא: _____

משמעות כלכלית :